Ejercicio de inducción

Induction exercise

Autor: Martin Alejandro Carvajal Rada

*Ingeniería de Sistemas, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia*

Correo-e: m.carvajal1@utp.edu.co

***Resumen*— En este documento voy a demostrar paso a paso que dos formula por inducción es verdadera**

***Palabras clave—* Inducción, fórmula, operaciones, demostrar, álgebra, suma, multiplicación**

***Abstract*— In this document I will demonstrate step by step that an induction formula is true**

***Key Word* — Induction, formula, operations, demonstrate, algebra, sum, multiplication**

1. INTRODUCCIÓN

Este vocablo es proveniente del latín “Inductio”. La inducción es un procedimiento basado en el conocimiento el cual consiste en analizar a través de la observación, situaciones particulares a fin de originar una conclusión.

En el área de la lógica, el razonamiento inductivo es un método que busca obtener conclusiones absolutas partiendo de hipótesis o suposiciones que abarcan datos específicos. En el ámbito de la física se encuentra un campo denominado electromagnetismo, para el electromagnetismo la inducción es un fenómeno por medio del cual, un impulso electromotriz es originado en un cuerpo cuando este se expone a un campo magnético.

1. CONTENIDO

Se denomina inducción a un proceso de conocimiento que consiste en observar circunstancias particulares y a partir de ellas generar una conclusión general. Este tipo de proceder es improcedente a la hora de garantizar veracidad en la conclusión, en la medida en que pueden existir casos desconocidos que nieguen o se contradigan a la conclusión general.

No obstante, puede ser útil como una forma provisoria de generar una teoría que luego será contrastada empíricamente. La inducción en un período de la historia fue harto utilizada, y en ella se fundamente un alto número de observaciones científicas. No obstante, con el posterior desarrollo del método científico, este tipo de procedimiento quedó totalmente descartado.

Por contraposición a la inducción, la deducción es un procedimiento que consiste en partir de leyes generales para dar cuenta de aspectos particulares del universo. En efecto, si sé que existe una fuerza denominada gravedad que atrae los objetos hacía el piso con una determinada aceleración, puedo calcular la velocidad que un objeto de una masa determinada tendrá a medida que se deja caer a distintas alturas.

Así, los científicos van elaborando distintas leyes que pretenden ser lo más generales posibles y a parir de allí van haciendo predicciones sobre determinados eventos, predicciones que de no cumplirse serán una refutación de la teoría esbozada.

En el [Parmenides](https://es.wikipedia.org/wiki/Parm%C3%A9nides_(di%C3%A1logo)), de [Platón](https://es.wikipedia.org/wiki/Plat%C3%B3n) del 370 a.C, quizá se puede identificar un temprano ejemplo de una explicación implícita de prueba inductiva. La más antigua huella de la inducción matemática se puede encontrar en la demostración de Euclides en el s. iii a. C. sobre la [infinitud de los números primos](https://es.wikipedia.org/wiki/Infinitud_de_los_n%C3%BAmeros_primos) y en la de [Bhaskara I](https://es.wikipedia.org/wiki/Bhaskara_I) usando su «método cíclico».

Una técnica reversa, contando regresivamente en lugar de ascendentemente, se puede encontrar en la [paradoja sorites](https://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_sorites), en donde se argumenta que si 1 000 000 de granos de arena forman un montón y removiendo un grano del montón a la vez, este sigue siendo un montón, entonces, hasta un solo grano (incluso ningún grano de arena) formaría un montón.

Una demostración implícita de la inducción matemática para [secuencias aritméticas](https://es.wikipedia.org/wiki/Serie_aritm%C3%A9tica) fue introducida por [Al-Karaji](https://es.wikipedia.org/wiki/Al-Karaji) en su obra Al-Fakhri escrita alrededor de 1000 d. C., usado para probar el [teorema del binomio](https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_binomio) y las propiedades del [triángulo de Pascal](https://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo_de_Pascal).

Ninguno de estos antiguos matemáticos explicitó la hipótesis inductiva. Otro caso similar fue el de Francesco Maurlico en su *Arithmeticorom libri duo* (1575), que usó la técnica para probar que la suma de los n primeros enteros impares es igual a n al cuadrado.

La primera formulación explícita sobre el principio de inducción fue establecida por el filósofo y matemático [Blaise Pascal](https://es.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal) en su obra Traité du triangle arithmétique(1665).[2](https://es.wikipedia.org/wiki/Inducci%C3%B3n_matem%C3%A1tica#cite_note-2)​ Otro francés, [Fermat](https://es.wikipedia.org/wiki/Fermat), hace amplio uso de un principio relacionado para una demostración indirecta del [descenso infinito](https://es.wikipedia.org/wiki/Descenso_infinito). La hipótesis inductiva fue también empleada por el suizo [Jakob Bernoulli](https://es.wikipedia.org/wiki/Jakob_Bernoulli) y a partir de entonces fue más conocida.

El tratamiento de carácter riguroso y sistemático llega solo en el siglo xix d. C. con [George Boole](https://es.wikipedia.org/wiki/George_Boole), [Augustus De Morgan](https://es.wikipedia.org/wiki/Augustus_De_Morgan), [Charles Sanders Peirce](https://es.wikipedia.org/wiki/Charles_Sanders_Peirce), [Giuseppe Peano](https://es.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano) y [Richard Dedekind](https://es.wikipedia.org/wiki/Richard_Dedekind).

Problema #1

Probar por inducción

3+7+11+ . . . . + (4K - 1) = K(2K + 1)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| N | (4N - 1) | N(2N + 1) | SUMA |
| 1 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 7 | 10 | 10 |
| 3 | 11 | 21 | 21 |
| 4 | 15 | 36 | 36 |
| 5 | 19 | 55 | 55 |

1. Probar para N=1

(4N - 1) = N(2N + 1)

4\*1 – 1 = 1(2\*1 + 1)

3 = 3

1. Hipótesis inductiva. Es verdad para N=K

3+7+11+ . . . . + (4K - 1) = K(2K + 1)

1. Probar que se cumple para N = K+1

3+7+11+ . . . + (4K - 1) + (4 (K+1) - 1) = (K+1)((2K+1) +1)

K(2K + 1) + (4 (K+1) - 1) = (K+1)((2K+1) +1)

2K2+ K + 4K + 4 – 1 = (K+1)((2K+1) +1)

2K2+ 5K + 3 = (K+1)(2K + 3)

2K2+ 5K + 3 = 2K2+ 5K + 3

Problema #2

Probar por inducción

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| N | (2N + 1) | N(N + 2) | SUMA |
| 1 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 5 | 8 | 8 |
| 3 | 7 | 15 | 15 |
| 4 | 9 | 24 | 24 |
| 5 | 11 | 35 | 35 |

1. Probar para N=1

(2N + 1) = N(N + 2)

2\*1 + 1 = 1(1 + 2)

3 = 3

1. Hipótesis inductiva. Es verdad para N=K

3+5+7+ . . . . + (2K + 1) = K(K + 2)

1. Probar que se cumple para N = K+1

3+5+7+ . . . + (2K + 1) + (2 (K+1) + 1) = (K+1)((K+1) + 2)

K(K + 2) + (2 (K+1) + 1) = (K+1)((K+1) +2)

K2+ 2K + 2K + 2 + 1 = (K+1)((K+1) +2)

K2+ 4K + 3 = (K+1)(K + 3)

K2+ 4K + 3 = K2+ 4K + 3

1. CONCLUSIONES

Si estamos entre matemáticos, la palabra inducción nos sugiere el Principio de Inducción Matemática: Si una propiedad vale para 0 y si siempre que la propiedad vale para un número (natural) vale para su sucesor, entonces la propiedad vale para todos los números (naturales).

Este famoso principio se hizo especialmente conocido como uno de los cinco postulados de Peano.

1. 1 es un número natural. (es decir, el conjunto de los números naturales no es vacío)

2. Si a es un número natural, entonces a+1 también es un número natural (llamado el sucesor de a).

3. 1 no es sucesor de ningún número natural. (primer elemento del conjunto)

4. Si hay dos números naturales a y b tales que sus sucesores son diferentes entonces a y b son números naturales diferentes.

5. Axioma de inducción: si un conjunto de números naturales contiene al 1 y a los sucesores de cada uno de sus elementos entonces contiene a todos los números naturales.

La Inducción matemática es definitivamente una forma de deducción. Es una inducción en el sentido en que generaliza a toda una clase a partir de unos pocos ejemplos. Es mas, usualmente la muestra está conformada por un caso, y la clase total es infinita! La inducción matemática es deductiva, porque la muestra mas una regla acerca de los casos no examinados realmente da información sobre todo elemento de la clase.

Así la conclusión de una inducción matemática no contiene más información que la que hay en las premisas. La inducción matemática por lo tanto concluye con certeza deductiva. pág. 2

Un número es cualquier cosa que sea el número de una clase. En teoría axiomática de conjuntos un número natural es un elemento del mínimo conjunto inductivo, conjunto al que se le da el nombre de conjunto de los números naturales; por inductivo se entiende un conjunto S al que pertenece 0 y tal que si n pertenece a S, n + 1 también pertenece.

Con esta definición lo que se está aceptando es que el principio de inducción matemática es inherente al concepto de número natural. Como bien sabemos para probar una proposición por inducción procedemos como sigue: Mostramos que vale para 0, (o 1 o un determinado número). Luego suponemos que si es cierto para un número n mayor que 0 (o 1 o un determinado número), entonces probamos que vale para n+1. Entonces concluimos que vale para todos los números mayores que 0 (o 1 o un determinado número).

Otra variante, llamada "inducción fuerte" (en contraste con la forma básica de inducción que a veces se conoce como "inducción débil") hace que el paso inductivo sea más fácil de demostrar utilizando una hipótesis más fuerte: uno prueba la afirmación *P*(*m* + 1) bajo la suposición de que *P*(*n*) se cumple para *cualquier* número natural *n* menor que *m* + 1; por el contrario, la forma básica sólo asume *P*(*m*).

Inducción Fuerte:

El nombre "inducción fuerte" no significa que este método pueda probar más que "inducción débil", sino que simplemente se refiere a la hipótesis más fuerte utilizada en la etapa inductiva; de hecho, los dos métodos son equivalentes, como se explica más adelante.

En esta forma de inducción completa todavía hay que probar el caso base, *P*(0), e incluso puede ser necesario probar casos base adicionales como *P*(1) antes de que se aplique el argumento general, como en el caso de los números de Fibonacci *Fn'*.

La inducción fuerte es equivalente a la inducción matemática ordinaria descrita anteriormente, en el sentido de que una demostración por un método puede transformarse en una demostración por el otro. Supongamos que hay una prueba de *P* (*n*) por inducción completa.

Que Q(*n*) signifique "*P*(*m*) se cumple para todos *m*tal que 0 ≤ *m* ≤ *n*". Entonces Q(*n*) se cumple para cualquier *n* si y sólo si P(*n*) se mantiene para cualquier *n*, y nuestra demostración de *P*(*n*) se transforma fácilmente en una demostración de Q(*n'*) por inducción (ordinaria). Si, por otro lado, *P*(*n*) hubiera sido demostrado por inducción ordinaria, la prueba ya sería efectivamente una por inducción completa: *P*(0) se prueba en el caso base, sin usar suposiciones, y *P*(*n* + 1) se prueba en la etapa inductiva, en la que se pueden asumir todos los casos anteriores, pero sólo se necesita usar el caso *P*(*n*).

1. RECOMENDACIONES

Tener en cuenta los pasos indispensables para comprobar por el método de inducción que tan verdadera es una fórmula

Le doy gracias al profesor Ingeniero José Gilberto Vargas Cano por explicarnos adecuadamente y de la mejor manera el método inductivo para comprobar que una fórmula es verdadera.

1. REFERENCIAS
2. Matemáticas Discretas y Combinatoria ;Ralph P. Grimaldi 3° edición Pretince Hall.
3. Matematica Discretas Sexta edición Richard Johnsonbaugh; Pretince Hall.
4. Matematicas Discretas eduard R. Sheninerman; thomson Leraning.
5. <http://cursos.aiu.edu/Algoritmos%20y%20Matematicas%20Discretas/PDF/Tema%201.pdf>
6. <https://es.wikipedia.org/wiki/Inducci%C3%B3n_matem%C3%A1tica>